Glava 2. VEKTORSKA ALGEBRA

2.1. VEKTORI

Neka su A, B, C i D proizvoljne tačke u prostoru. Skup svih usmjerenih odsječaka CD takvih da je CD↑↑AB i CD=AB, nazivamo vektorom i označavamo sa $\vec{AB}$. (Ovdje je ↑↑ oznaka za paralelno i usmjereno na istu stranu). Vektori se označavaju i sa $\vec{a}$, $\vec{b}$ .... ili **a, b...** .

Dužina (intenzitet) vektora $\vec{a}$ označava se sa $|\vec{a}|$ ili prosto sa a. Vektor čiji je intenzitet jednak 0 naziva se nula vektorom. Kod nula vektora samo je intenzitet jednoznačno određen, dok su pravac i smjer proizvoljni. Nula vektor se označava sa $\vec{0}$. Vektor čiji je intenzitet jednak 1 naziva se jedinični vektor ili ort. Za vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ jedinični vektor je $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$. Vektor koji ima isti intenzitet i pravac kao vektor $\vec{a}$ a smjer suprotan smjeru vektora $\vec{a}$ nazivamo suprotnim vektorom vektora $\vec{a}$ i označavamo sa $-\vec{a}$. Zapazimo da je $-\left(-\vec{a}\right) = \vec{a}$.

Definicija 1. Neka su A, B i C tačke u prostoru i $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. Vektor $\vec{AC}$ nazivamo sumom vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i označavamo sa $\vec{a} + \vec{b}$.

Označimo sa V skup svih vektora u prstoru.

Svojstva operacije sabiranja vektora:

1) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (zakon komutacije),

2) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V: \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (zakon asocijacije),

3) $\forall \vec{a}\ \exists \vec{n} \in V: \vec{a} + \vec{n} = \vec{n} + \vec{a} = \vec{a}$ (neutralni elemenat: $\vec{0}$),

4) $\forall \vec{a}\ \exists \vec{a}' \in V: \vec{a} + \vec{a}' = \vec{n}$ (suprotni element: za vektor $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$).

Gornja svojstva sabiranja vektora mogu se objediniti u tvrđenje: (V,+) je Abelova grupa.

Definicija 2. Proizvod $\alpha \cdot \vec{a}$ realnog broja α i vektora $\vec{a}$ je vektor $\vec{b}$ za koji je:

a) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, b) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ako je $\alpha \geq 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ ako je $\alpha < 0$.

Svojstva množenja vektora skalarom:

1) $\forall \vec{a} \in V$: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,

2) $\forall \alpha, \beta \in R \ \forall \vec{a} \in V$: $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$,

3) $\forall \alpha \in R \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$: $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$,

4) $\forall \alpha, \beta \in R \ \forall \vec{a} \in V$: $\alpha\left(\beta \cdot \vec{a}\right) = \beta\left(\alpha \cdot \vec{a}\right) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$.

Definicija 3. Razlikom vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, oznaka $\vec{a} - \vec{b}$, nazivamo vektor $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Svaku tačku u prostoru moguće je jednoznačno odrediti pomoću pravouglog sistema koordinata. Koordinatni sistem u prostoru se sastoji od tri uzajamno normalne ose (orijentisane prave) koje se sijeku u jednoj tački O (koordinatni početak). Jednu od ovih pravih nazivamo osom apscisa (osa Ox), drugu -osa ordinata (osa Oy), a treću -osa aplikata (osa Oz). Na svakoj od ovih osa izabrani su jedinični vektori koji su označeni sa $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Ako je M proizvoljna tačka u prostoru, tada vektor $\vec{OM}$ nazivamo radijus vektorom take M i označavamo sa $\vec{r}$. Koorinatama tačke M, u koordinatnom sistemu Oxyz, nazivamo koordinate radijus vektora $\vec{OM}$. Ako je $\vec{OM} = (x, y, z)$, tada se koordinate tačke M zapisuju: M(x,y,z), gdje je x -apscisa, y -orinata, z -aplikata.

Svakoj uređenoj trojci brojeva (x,y,z) odgovara jedna i samo jedna tačka u prostoru. Važi i obrnuto.

- Ako je $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$, tada je
$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$$
- Ako je $\vec{a} = (x, y, z)$, tada je $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Primjer 1. Date su tačke A(2,3,–4) i B(–1,5,–2). Naći kordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Rješenje. $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\cdot\vec{i}+(5-3)\cdot\vec{j}+(-2+4)\cdot\vec{k}=(-3,2,2)$. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{17}$.

- Neka je odsječak AB: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ podijeljen tačkom $C(x_3,y_3,z_3)$ tako da je AC:CB=λ. Tada je:

$$x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z_3=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Navedene formule važe i za slučaj $\lambda<0$ (tada se tačka C nalazi na produžetku odsječka AB).

Primjer 2. Date su tačke A(3,4,–1) i B(1,6,5). Naći koordinate tačke C koja je sredina odsječka AB. Rješenje. $x_C=\frac{3+1}{2}=2$, $y_C=\frac{4+6}{2}=5$, $z_C=\frac{-1+5}{2}=2$.

Primjer 3. Date su tačke A(–2,4,1) i B(3,–2,5). Odrediti koordinate tačke C takve da je tačka B sredina odsječka AC. Rješenje. $3=\frac{-2+x_C}{2}$, $x_C=8$; $-2=\frac{4+y_C}{2}$, $y_C=-8$;

$5=\frac{1+z_C}{2}$, $z_C=9$.

Primjer 4. Zadat je trougao sa tjemenima A(2,–3,1), B(–6,1,3) i C(1,2,–1). Naći koordinate težišta trougla. Rješenje. Neka je T težište trougla i P sredina odsječka AB. Poznato je da težište trougla dijeli težišnu duž CP u odnosu 2:1 (CT:TP=2:1). Kako tačka P ima koordinate (–2,–1,2), to je $x_T=\frac{1+2\cdot(-2)}{1+2}=-1$, $y_T=\frac{2+2\cdot(-1)}{1+2}=0$, $z_T=\frac{-1+2\cdot 2}{1+2}=1$.

Napomena. Za trougao sa tjemenima $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ i $C(x_3,y_3,z_3)$ imamo da je težište $T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

$CT=(x_T-1,\ y_T-2,\ z_t+1)$

$TP:$

$\cancel{2}\ \overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{TP}$

2.2 SKALARNI PROIZVOD

Prije nego što definišemo skalarni proizvod dva vektora, podsjetimo na ugao između dva vektora. Uglom između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazivamo ugao između pravih određenih vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

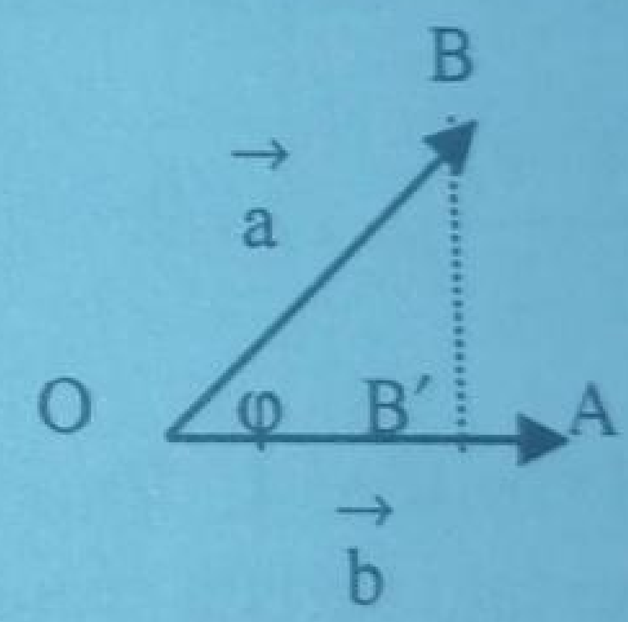
Definicija 1. Skalarnim proizvodom dva vektora nazivamo realni broj koji je jednak proizvodu inteziteta tih vektora i kosinusa ugla između njih.

Skalarni proizvod nenultih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ili $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi,$$

gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$ ili $\vec{b}$ jednak nula vektoru, tada se, po definiciji, uzima da je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Neka je $\vec{V}$ skup svih vektora u prostoru. Na skalarni proizvod dva vektora se može gledati i kao na preslikavanje $(\cdot,\cdot)$: $\vec{V}\times\vec{V}\to R$ koje svakom paru vektora $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\vec{V}\times\vec{V}$ pridružuje realni broj $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$, gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



sl 1

Neka je $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ algebarska vrijednost (normalne) projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ (sl 1). Iz pravouglog trougla OBB' imamo da je $pr_{\vec{b}}\vec{a} = a\cdot\cos\varphi$, pa je $\vec{a}\cdot\vec{b} = b\cdot pr_{\vec{b}}\vec{a} = a\cdot pr_{\vec{a}}\vec{b}$. Odavde slijedi da je $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b}$, $\qquad pr_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a}$.

Iz definicije skalarnog proizvoda slijedi: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ ako je φ oštar ugao, i $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ ako je φ tup ugao.

Svojstva skalarnog proizvoda:

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (svojstvo komutacije),
- $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (svojstvo distribucije),
- $\alpha\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(\alpha\cdot\vec{b}\right)$, $\alpha\in R$.

Skalarni proizvod $\vec{a}\cdot\vec{a}$ naziva se skalarnim kvadratom vektora $\vec{a}$ i označava $\vec{a}^2$. Saglasno definiciji skalarnog proizvoda važi da je $\vec{a}^2 = a^2$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadati koordinatama: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ u pravouglom koordinatnom sistemu sa bazom $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, tada je:

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

i

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Teorema 1.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow (\vec{a}=\vec{0} \vee \vec{b}=\vec{0} \vee \vec{a}\perp\vec{b})$,

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \wedge \vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\wedge\vec{b}=(b_1,b_2,b_3) \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

Primjer 1. Neka je $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=3$ i $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$. Izračunati:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, b) $\vec{a}^2$, c) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, d) $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2$, e) $\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)$.

Rješenje. a) 6, b) 16, c) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\left|\vec{b}\right|^2=13$.

d) $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=9\left|\vec{a}\right|^2+12\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4\left|\vec{b}\right|^2=252$, e) -189.

Primjer 2. Dato je $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ i $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$. Odrediti dužinu vektora $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Rješenje. $\vec{c}^2=\left|\vec{c}\right|^2=\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=4\left|\vec{a}\right|^2+12\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+9\left|\vec{b}\right|^2=36$, $\left|\vec{c}\right|=6$.

Primjer 3. Izračunati skalarni proizvod vektora $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ i $\vec{b}=-\vec{p}+3\vec{q}$, ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jedinični i normalni. Rješenje. 3.

Primjer 4. Naći skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je:

a) $\vec{a}=(3,1,-5)$, $\vec{b}=(2,4,3)$; b) $\vec{a}=(-1,2,1)$, $\vec{b}=(-2,0,4)$; c) $\vec{a}=(2,5,1)$, $\vec{b}=(-1,2,0)$.

R. a) -5, b) 6, c) 8.

Primjer 5. Dati su vektori $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(-1,0,2)$ i $\vec{c}=(1,2,2)$. Naći:

a) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$, b) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, c) $\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$, d) $\vec{a}^{\,2}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$,

e) $\vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}\cdot\vec{c}+\vec{c}^{\,2}\cdot\vec{a}$, f) $\vec{a}^{\,2}+3\vec{b}^{\,2}-\vec{c}^{\,2}$, g) $\sqrt{\vec{c}^{\,2}}$.

Rješenje. a) $3\vec{a}$, b) $-\vec{c}$, c) $9\vec{b}$, d) 52, e) (18,28,47), f) 20, g) 3.

Primjer 6. Naći ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadatih svojim koordinatama:

a) $\vec{a}=(-1,2,1)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$; b) $\vec{a}=(3,-4,1)$, $\vec{b}=(1,4,3)$; c) $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(3,1,-2)$.

Rješenje. a) $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$, b) $\varphi=\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)$, c) $90°$.

Primjer 7. Dati su vektori $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

Izračunati: a) $pr_{\vec{a}}\vec{b}$, b) $pr_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$, c) $pr_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{c}$, d) $pr_{\vec{b}}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Rješenje. a) $\frac{\sqrt{6}}{9}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, c) $\frac{18}{\sqrt{19}}$, d) 5.

Primjer 8. Naći vektor $\vec{x}$ koji je normalan na vektore $\vec{a}=(1,4,14)$ i $\vec{b}=(2,-1,1)$ i koji zadovoljava uslov $\vec{x}\cdot(3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})=-7$.

Rješenje. $\vec{x}=(2,3,-1)$. Uputstvo. Neka je $x=(x_1,x_2,x_3)$. Treba riješiti sistem jednačina: $x_1+4x_2+14x_3=0$, $2x_1-x_2+x_3=0$, $3x_1-4x_2+x_3=-7$.

Zadaci za vježbu

1. Dati su vektori $\vec{a}=(2,1,-2)$, $\vec{b}=(-1,3,1)$ i $\vec{c}=(3,1,4)$. Naći vektor $\vec{x}$ koji zadovoljava uslove $\vec{a}\cdot\vec{x}=-2$, $\vec{b}\cdot\vec{x}=8$, $\vec{c}\cdot\vec{x}=17$. Rješenje. (1,2,3).

2. Dokazati da je četvorougao A(–5,3,4), B(–1,–7,5), C(6,–5,–3) i D(2,5,–4) kvadrat.

Rješenje. Uputstvo. AB=BC=CD=DA, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

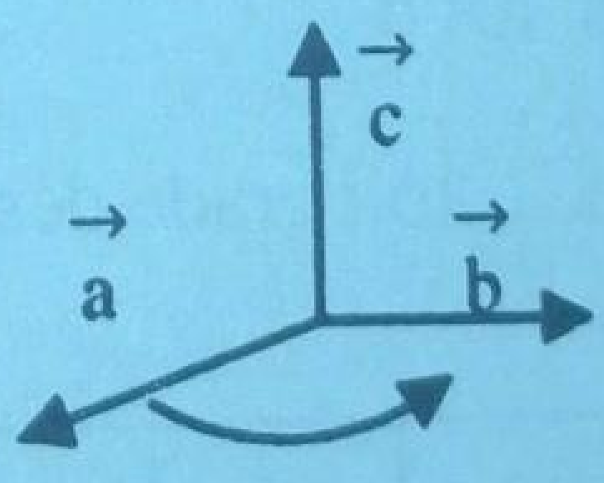
3. Odrediti vrijednosti parametra m za koje su vektori:

a) $\vec{a}=(1,3,7)$ i $\vec{b}=(m,2,-1)$; b) $\vec{a}=(m,-3,2)$ i $\vec{b}=(m-4,m,3)$,

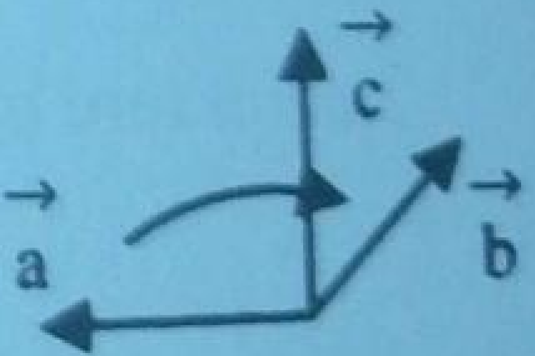
ortogonalni. Rješenje. a) 1. b) 1 ili 6.

2.3.VEKTORSKI PROIZVOD

Za uređenu trojku $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ nekomplanarnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, kažemo da obrazuje desnu (lijevu) trojku vektora, ako se iz kraja vektora $\vec{c}$ najmanja rotacija od prvog vektora $\vec{a}$ do drugog vektora $\vec{b}$ izvršava u smjeru suprotnom kretanju kazaljki na časovniku (sl 1) (u smjeru kretanja kazaljki na časovniku sl 2).



sl 1



sl 2

Uvedimo pojam vektorskog proizvoda dva vektora.

Definicija 1. Vektorskim proizvodom nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazivamo vektor $\vec{c}$ određen uslovima:

a) Vektor $\vec{c}$ je normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $\vec{c}\perp\vec{a}$ i $\vec{c}\perp\vec{b}$;

b) Intenzitet vektora $\vec{c}$ je jednak površini paralelograma konstruisanog na vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao stranicama, tj. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

c) Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju desnu trojku vektora.

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se označava sa $\vec{a}\times\vec{b}$ ili sa $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni (specijalno, ako je jedan od njih jednak nula vektoru), tada se po definiciji uzima da je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Na vektorski proizvod dva vektora se može gledati i kao na preslikavanje $[\cdot,\cdot]:\vec{V}\times\vec{V}\to\vec{V}$ koje svakom paru vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iz skupa $\vec{V}\times\vec{V}$ pridružuje vektor $\vec{c}$ iz skupa $\vec{V}$ sa svojstvima a), b) i c).

Svojstva vektorskog proizvoda:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (antikomutacija),
- $\lambda\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)$,
- $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

Za izračunavanje površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koristi se formula $P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Vektorski proizvod može biti izražen i formulom $\vec{a}\times\vec{b}=P\cdot\vec{e}$, gdje je $\vec{e}$ ort (jedinični vektor) vektora $\vec{a}\times\vec{b}$.

Za vektore baze $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ koji grade desnu trojku vektora važi:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadati koordinatama $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, tada je

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$$

Teorema 1. a) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow (\vec{a}=\vec{0} \vee \vec{b}=\vec{0} \vee \vec{a}\parallel\vec{b})$.

b) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \wedge \vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\wedge\vec{b}=(b_1,b_2,b_3) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

Primjer 1. Dati su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ i $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$. Naći:

a) $\vec{a}\times\vec{b}$,   b) $\left|\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|$.

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{6}=$
$=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$

Rješenje. a) Kako je $|\vec{a}\times\vec{b}|=6$, to je $\vec{a}\times\vec{b}=6\cdot\vec{e}$, gdje je $\vec{e}$ jedinični vektor pravca vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ i takav da je $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{e}\right)$ desna trojka vektora.

b) $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)=6\,\vec{a}\times\vec{a}-9\,\vec{a}\times\vec{b}+4\,\vec{b}\times\vec{a}-6\,\vec{b}\times\vec{b}=-13\,\vec{a}\times\vec{b}$,

$\left|\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|=\left|-13\,\vec{a}\times\vec{b}\right|=78$.

Primjer 2. Dati su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ za koje je : $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$ i $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{3\pi}{4}$. Naći:

a) $|\vec{a}\times\vec{b}|$,   b) $\left|\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$.   Rješenje. a) 8, b) 56.

Primjer 3. Dato je a=3 , b=20 i $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$. Naći $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Rješenje. $30\sqrt{3}$. Uputstvo. Iz $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$ slijedi da je $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Primjer 4. Dati su vektori $\vec{a}=(2,3,-2)$ i $\vec{b}=(3,1,2)$ .Naći: a) $\vec{a}\times\vec{b}$, b) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

Rješenje. a) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$=(8,−10, −7). b) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=-2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$=(−16, 20, 14).

Primjer 5. Naći sinus ugla između vektora:

a) $\vec{a}=(1,2,2)$ i $\vec{b}=(-1,-2,2)$, b) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Rješenje. $\sin\varphi=\frac{4\sqrt{5}}{9}$. Uputstvo. $\sin\varphi=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}=(8,-4,0)$.

b) $\sin\varphi=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Primjer 6. Naći bar jedan vektor $\vec{c}$ koji je normalan na vektore $\vec{a}=(1,1,-1)$ i $\vec{b}=(-5,1,1)$.

Rješenje. $\vec{c}=(1,2,3)$. Uputstvo. $\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ -5 & 1 & 1\end{vmatrix}$.

Primjer 7. Naći jedinični vektor $\vec{c}$ koji je normalan na vektore:

a) $\vec{a}=(1,3,-2)$ i $\vec{b}=(2,1,3)$; b) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

Rješenje. a) $\vec{c}=\pm\left(\frac{11}{\sqrt{195}},-\frac{7}{\sqrt{195}},-\frac{5}{\sqrt{195}}\right)$. Uputstvo. Vektor $\vec{c}$ ima pravac vektora $\vec{a}\times\vec{b}$, pa je $\vec{c}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$; $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=(11,-7,-5)$, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{195}$. b) $\vec{c}=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Primjer 8. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog na vektorima:

a) $\vec{a}=(8,1,4)$, $\vec{b}=(-3,2,1)$; b) $\vec{a}=(-1,2,0)$, $\vec{b}=(2,3,-4)$.

Rješenje. a) $9\sqrt{10}$. Uputstvo. $\vec{a}\times\vec{b}=(-7,-20,19)$, $P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

b) $\sqrt{129}$. Uputstvo. $\vec{a}\times\vec{b}=(-8,-4,-7)$.

Primjer 9. Naći površinu trougla čija su tjemena:

a) $A(2,-1,1)$, $B(4,-2,3)$, $C(1,2,-1)$;

b) $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ i $C(x_3,y_3,z_3)$.

R. a) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Uputstvo. $\vec{AB}=(2,-1,2)$, $\vec{AC}=(-1,3,-2)$, $\vec{AB}\times\vec{AC}=(-4,2,5)$, $P=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$.

b) $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$,

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right),\quad P=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|,$$

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Primjer 10. Dati su vektori $\vec{a}=(-3,2,1)$, $\vec{b}=(-1,2,2)$ i $\vec{c}=(1,2,1)$.

Naći: a) $pr_{\vec{a}}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, b) $pr_{\vec{b}\times\vec{c}}\,\vec{a}$.

Rješenje. a) $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. Uputstvo. $pr_{\vec{a}}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}{\left|\vec{a}\right|}$. b) $\frac{8\sqrt{29}}{29}$.

Primjer 11. Odrediti vrijednosti parametara α i β za koje su vektori $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ i $\vec{b}=2\vec{i}+2\beta\vec{j}+3\vec{k}$ kolinearni.

Rješenje. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{b}=(3+2\beta,-3\alpha-2,2\alpha\beta-2)=(0,0,0)$, $\alpha=-\frac{2}{3}$, $\beta=-\frac{3}{2}$.

2.4. MJEŠOVITI PROIZVOD

Uvedimo pojam mješovitog proizvoda tri vektora.

Definicija 1. Mješovitim proizvodom vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ naziva se broj jednak skalarnom proizvodu vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Mješoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ se označava sa $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ili $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

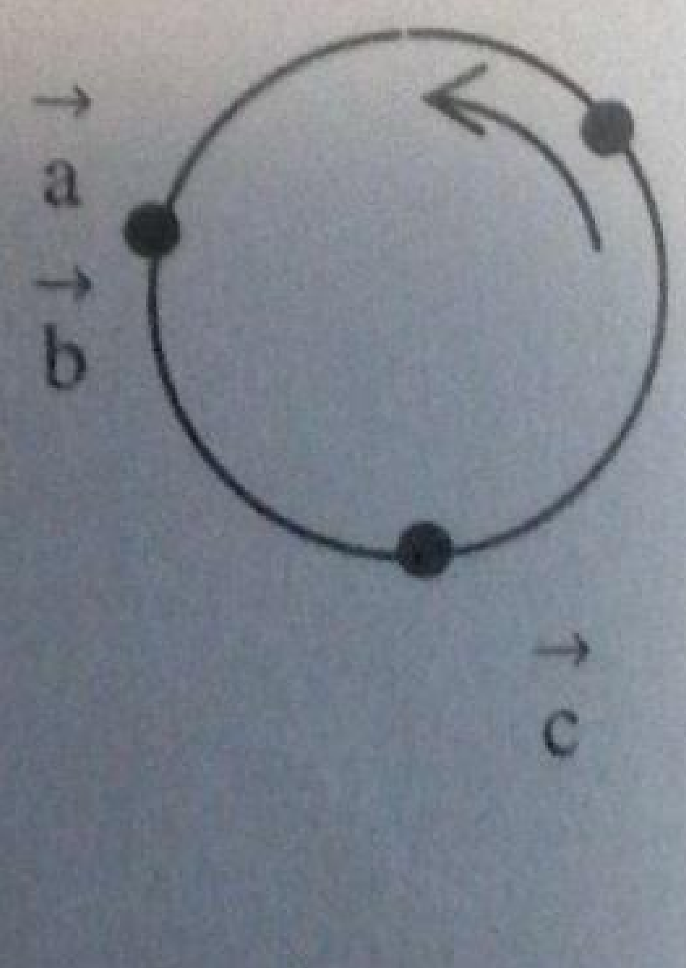
Geometrijski $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$ predstavlja zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Zapremina trostrane piramide konstruisane nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednaka je $\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$.

Ako je $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}>0$ (<0), tada vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ grade desnu (lijevu) trojku vektora.

Svojstva mješovitog proizvoda:

- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$, tj. vrijednost mješovitog proizvoda se ne mijenja pri cikličnoj promjeni vektora.
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$.
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow$ (vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni).

Napomena: "Ciklično" svojstvo mješovitog proizvoda se lako pamti korišćenjem kružnice (sl 1).



Ako su vektori $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, tada je $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Primjer 1. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su uzajamno normalni, obrazuju desnu trojku vektora i $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ i $|\vec{c}|=3$. Izračunati $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

R. 6.

Primjer 2. Naći mješoviti proizvod vektora:

a) $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,-1,3)$, $\vec{c}=(2,1,4)$;

b) $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(2,7,4)$, $\vec{c}=(1,2,1)$;

c) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

Rješenje. a) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=-15$, b) -7, c) 17.

Primjer 3. Uprostiti izraze:

a) $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$,

b) $\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$, c) $\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)$.

Rješenje. a) $-4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, b) $\vec{0}$, c) $3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Primjer 4. Ispitati da li su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, ako je:

a) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-1,3,2)$, $\vec{c}=(-2,3,4)$;

b) $\vec{a}=(-2,1,3)$, $\vec{b}=(2,4,1)$, $\vec{c}=(-2,6,7)$;

c) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{j}$?

Rješenje. a) Nijesu komplanarni, jer je $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{vmatrix}=15\neq 0$. b) Komplanarni. c) Komplanarni.

Primjer 5. Naći vrijednost parametra α za koje su vektori:

a) $\vec{a}=(1,\alpha,-2)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$ i $\vec{c}=(5,-2,-1)$;

b) $\vec{a}=(1,5,4)$, $\vec{b}=(1,\alpha,4)$ i $\vec{c}=(10,-1,10)$ komplanarni.

Rješenje. a) $\alpha=2$. Uputstvo. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & \alpha & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -1\end{vmatrix}=0.$ b) $\alpha=-4$.

Primjer 6. Ispitati da li tačke A, B, C i D pripadaju jednoj ravni, ako je:
a) A(1,3,4), B(2,3,1), C(−3,1,0), D(1,1,1);
b) A(3,−4,1), B(2,−3,7), C(1,−4,3), D(4,−3,5);

Rješenje. a) Treba ispitati da li su vektori $\vec{AB}=(1,0,-3)$, $\vec{AC}=(-4,-2,-4)$ i $\vec{AD}=(0,-2,-3)$ komplanarni. Kako je $\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ -4 & -2 & -4\\ 0 & -2 & -3\end{vmatrix}=-22\neq 0$, to date tačke ne pripadaju jednoj ravni. b) Kako je $\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=0$, to date tačke pripadaju jednoj ravni.

Primjer 7. Dokazati: Tačke $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ i $D(x_4,y_4,z_4)$ pripadaju jednoj ravni onda i samo onda kada je $\begin{vmatrix}x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4\\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4\\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4\end{vmatrix}=0.$

Rješenje. Uputstvo. Vektori: $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{CD}$ su komplanarni.

Primjer 8. Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog na vektorima:
a) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+7\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$;
b) $\vec{a}=(3,4,-1)$, $\vec{b}=(-1,0,4)$, $\vec{c}=(1,3,2)$.

Rješenje. a) $V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 7 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}\right|=45.$ b) $V=9$.

Primjer 9. Naći zapreminu piramide zadate tjemenima:
a) A(3,4,5), B(4,8,1), C(−1,2,2) i D(−2,1,3);
b) $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ i $D(x_4,y_4,z_4)$.

Rješenje. a) V=15. b) $V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4\\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4\\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4\end{vmatrix}\right|.$

Primjer 10. Data su tjemena piramide A(−5,−4,8), B(2,3,1), C(4,1,−2) i D(6,3,7). Naći dužinu visine koja odgovara strani BCD.
Rješenje. 11.

Primjer 11. Zapremina četvorostrane piramide je 5, a njena tri tjemena su tačke A(2,1,−1), B(3,0,1) i C(2,−1,3). Naći četvrto tjeme piramide ako je poznato da se ono nalazi na osi ordinata.
Rješenje. (0,8,0) ili (0,−7,0).

Primjer 12. Dati su vektori $\vec{a}=(3,5,-1)$, $\vec{b}=(0,-2,1)$ i $\vec{c}=(-2,2,3)$. Naći vektor $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

Rješenje. (3,3,0).

Primjer 13. Neka je V skup svih vektora u prostoru. U skupu V riješiti jednačine:

a) $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$, b) $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{0}$, c) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{x}=0$, d) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{x}=\vec{0}$.

gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati vektori.

Rješenje. a) Svaki vektor iz V koji je normalan na vektor $\vec{a}$.

b) Svaki vektor iz V koji je kolinearan sa vektorom $\vec{a}$ (koji ima isti pravac kao i vektor $\vec{a}$).

c) Ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nijesu kolinearni, tada je rješenje svaki vektor iz V koji pripada ravni određenoj sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada je rješenje svaki vektor iz V, jer je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

d) Svaki vektor iz V koji je normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

140 + 68 = = 208

$|(\vec{BA}\times\vec{BC})\,\vec{BD}|$